Über die Szépschen Ringerweiterungen

Von J. SZENDREI in Szeged

Herrn Prof. L. Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

1.

J. Szép hat in seiner Arbeit [8] den Begriff der allgemeinen Zerlegung eines Ringes eingeführt und das entsprechende inverse Erweiterungsproblem für zwei Ringe gelöst. Es handelt sich um die ringtheoretischen Analoga der faktorisierbaren Gruppen bzw. des Zappa—Szépschen Produktes von zwei Gruppen. Es ergaben sich gewisse Resultate allgemeiner Natur über diese Ringerweiterungen, die man als die ringtheoretischen Analoga von gruppentheoretischen Sätze [2, 6, 7] betrachten kann.

Wir werden hier zeigen, daß man Sätze bekommen kann, die eine „stärkere" Ähnlichkeit mit Sätzen aus der Theorie der Gruppenfaktorisation aufweisen, wenn die von L. Rédei [3, 4] eingeführte Doppelendomorphismen, und (befreundeten) Doppelhomothetismen statt der (einseitigen) Endomorphismen als Hilfsmittel verwendet werden.[1]) Ferner werden wir auf diese Weise weitere Sätze über die Szépschen Ringerweiterungen gewinnen.

2.

Zunächst werden wir einige bekannte, grundlegende Begriffe und Formeln zusammenfassen um uns leichter auf sie beziehen zu können. (Vgl. L. Rédei [3, 4] und J. Szép [8].)

Wir bezeichnen einen (assoziativen) Ring mit R und die Elemente von R mit $o, a, b, \ldots$. Für eine *Doppelabbildung* A von R in sich bezeichnet man mit ${}^{A}a, a^{A}$ die entsprechenden Bilder von a, so daß dann A aus den zwei Abbildungen

$$a \to {}^{A}a, \quad a \to a^{A} \qquad (a \in R)$$

[1]) Diese Begriffe wurden von G. Hochschild in seiner Arbeit [1] schon früher eingeführt, doch werden wir die Arbeiten [3, 4] von L. Rédei zitieren, weil hier die von ihm herrührende Terminologie gebraucht wird.

besteht (in dieser Reihenfolge). Unter der trivialen Doppelabbildung von R in sich versteht man diejenige, bei der alle Bildelemente gleich o sind. In der Menge der Doppelabbildungen von R in sich definiert man die Summe und das Produkt von zwei Doppelabbildungen A, B folgendermaßen:

(1) $$^{\mathsf{A}+\mathsf{B}}a = {}^{\mathsf{A}}a + {}^{\mathsf{B}}a, \quad a^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = a^{\mathsf{A}} + a^{\mathsf{B}},$$

(2) $$^{\mathsf{AB}}a = {}^{\mathsf{A}}({}^{\mathsf{B}}a), \quad a^{\mathsf{AB}} = (a^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}.$$

Ein *Doppelhomothetismus* von R bedeutet eine Doppelabbildung A von R in sich mit den Eigenschaften:

(3) $$^{\mathsf{A}}(a+b) = {}^{\mathsf{A}}a + {}^{\mathsf{A}}b, \quad (a+b)^{\mathsf{A}} = a^{\mathsf{A}} + b^{\mathsf{A}},$$

(4) $$^{\mathsf{A}}(ab) = ({}^{\mathsf{A}}a)b, \quad (ab)^{\mathsf{A}} = a(b^{\mathsf{A}}),$$

(5) $$a({}^{\mathsf{A}}b) = (a^{\mathsf{A}})b,$$

(6_0) $$({}^{\mathsf{A}}a)^{\mathsf{A}} = {}^{\mathsf{A}}(a^{\mathsf{A}}).$$

Ein beliebiger Ring D von *befreundeten Doppelhomothetismen* von R ist ein Ring von Doppelabbildungen von R in sich, für die außer den Eigenschaften (1)—(5)

(6) $$({}^{\mathsf{A}}a)^{\mathsf{B}} = {}^{\mathsf{A}}(a^{\mathsf{B}})$$

für alle $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in D$ erfüllt ist. Es ist klar, daß (6_0) in (6) enthalten ist. Nach L. Rédei ist der folgende Satz bekannt:

Jeder Ring D von befreundeten Doppelhomothetismen von R ist mindestens in einem solchen maximalen Ring enthalten.

Sei ein anderer Ring P mit den Elementen $0, \alpha, \beta, \ldots$ gegeben. Das Szépsche Erweiterungsproblem besteht darin, aus den gegebenen Ringen R, P alle Ringe $\mathfrak{R}$ mit[2])

$$\mathfrak{R}^{+} = \mathfrak{S}_1^{+} \dotplus \mathfrak{S}_2^{+}, \quad \mathfrak{S}_1 \approx R, \quad \mathfrak{S}_2 \approx \mathsf{P}, \quad \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = 0$$

zu bestimmen, wobei $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ Unterringe von $\mathfrak{R}$ sind. Die Lösung dieses Problems gewinnt man auf folgende Weise:[3]) In der Menge $\mathfrak{R} = R \cdot \mathsf{P}$ der (geordneten) Paare (a, α) $(a \in R, \alpha \in \mathsf{P})$ definieren wir die Gleichheit, die Addition und die Multiplikation durch die folgenden Relationen:

$$(a, \alpha) = (b, \beta) \Longleftrightarrow a = b, \alpha = \beta,$$

(A) $$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta),$$

(B) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + {}^{\alpha}b + a^{\beta}, {}^{a}\beta + \alpha^{b} + \alpha\beta),$$

---

[2]) $\dotplus$ bezeichnet die direkte Summe von Moduln, durch das oben angesetzten „+" Zeichen wird der Modul des Ringes bezeichnet und $\approx$ ist das Zeichen des Isomorphismus.

[3]) Vgl [5].

wobei die Funktionen

(C) $${}^{\alpha}a,\ a^{\alpha} \in R, \quad {}^{a}\alpha,\ \alpha^{a} \in \mathrm{P}$$

den „Anfangsbedingungen"

(D) $${}^{\alpha}o = o^{\alpha} = {}^{0}a = a^{0} = o, \quad {}^{a}0 = 0^{a} = {}^{o}\alpha = \alpha^{o} = 0$$

unterworfen sind. Die soeben definierte Struktur $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein Ring, wenn

(1*) $${}^{\alpha+\beta}a = {}^{\alpha}a + {}^{\beta}a, \quad a^{\alpha+\beta} = a^{\alpha} + a^{\beta},$$

(2*) $${}^{\alpha\beta}a = {}^{\alpha}({}^{\beta}a), \quad a^{\alpha\beta} = (a^{\alpha})^{\beta},$$

(3*) $${}^{\alpha}(a+b) = {}^{\alpha}a + {}^{\alpha}b, \quad (a+b)^{\alpha} = a^{\alpha} + b^{\alpha},$$

(4*) $${}^{\alpha}(ab) = ({}^{\alpha}a)b + {}^{a^{\alpha}}b, \quad (ab)^{\alpha} = a(b^{\alpha}) + a^{{}^{b}\alpha},$$

(5*) $$a({}^{\alpha}b) + a^{({}^{\alpha}b)} = (a^{\alpha})b + {}^{(a^{\alpha})}b,$$

(6*) $$({}^{\alpha}a)^{\beta} = {}^{\alpha}(a^{\beta})$$

und die dualen Gleichungen[4]) gelten. Diese Ringe sind bis auf Isomorphie die sämtlichen *Szépschen Erweiterungen* $\mathfrak{R}$ von R und P. $(R, 0)$ und (o, P) sind Unterringe[5]) von $\mathfrak{R}$ und

$$\mathfrak{R}^{+} = (R, 0)^{+} \dotplus (o, \mathrm{P})^{+}, \quad (R, 0) \approx R\ \big((a, 0) \to a\big), \quad (o, \mathrm{P}) \approx \mathrm{P}\ \big((o, \alpha) \to \alpha\big).$$

3.

Wir legen uns eine Erweiterung $\mathfrak{R}$ von R und P in dem besprochenen Sinne vor. Anders gesagt bedeutet das, daß wir vier Funktionen ${}^{\alpha}a, a^{\alpha} (\in R)$, ${}^{a}\alpha, \alpha^{a} (\in \mathrm{P})$ mit (D) und (1*)—(6*) vorgeben. Diese Funktionen kann man als Operatorprodukte auffassen. In diesem Sinne ist z. B. P gleichzeitig ein Rechts- und Linksoperatorbereich von R. Daraus folgt, daß jedes Element α von P eine Doppelabbildung $a \to {}^{\alpha}a, a \to a^{\alpha}$ von R in sich mit den Eigenschaften (D), (1*)—(6*) induziert. Diese durch α induzierte Doppelabbildung von R in sich bezeichnen wir mit α^{*} und die Menge von α^{*} mit P^{*}. Aus (3) folgt, daß jede Doppelabbildung α^{*} ein Doppelendomorphismus von R^{+}, aber wegen

---

4) Es ist leicht zu sehen, daß die Vertauschung der lateinischen und griechischen Buchstaben in einer gültigen Formel in R wegen (A) und (B) eine richtige Formel in P liefert, die die *duale* der ursprünglichen Formel genannt wird. Von je zwei zueinander dualen Behauptungen, Formeln oder Definitionen genügt es also, immer nur die eine zu beweisen bzw. zu erklären.

5) Sind K, K Komplexe von R bzw. P, so soll (K, K) stets den Komplex derjenigen Elemente (a, α) bezeichnen, für die $a \in K$, $\alpha \in \mathrm{K}$ gelten.

(4*) und (5*) im allgemeinen kein Doppelhomothetismus von R ist. Zur näheren Untersuchung des Ringes R können diese Doppelabbildungen gute Dienste leisten. Für die Addition und Multiplikation dieser Doppelabbildungen gelten nach (1*), (2*)

$$\alpha^* + \beta^* = (\alpha + \beta)^*,$$
$$\alpha^* \beta^* = (\alpha\beta)^*.$$

Hieraus und aus (1*)—(6*) kann man leicht beweisen, daß P^* einen zu P homomorphen Ring bildet: d. h.

$$\mathrm{P} \sim \mathrm{P}^* \quad (\alpha \to \alpha^*). \tag{7}$$

Also besteht die homomorphe Abbildung einfach darin, daß man jedes Ringelement α der durch α induzierten Doppelabbildung α^* zuordnet. Bezeichnen wir den Kern des Homomorphismus (7) mit $\mathrm{K}(\mathrm{P})$; d. h. $\mathrm{K}(\mathrm{P})$ ist die Menge der α mit ${}^{\alpha}a = a^{\alpha} = o$ für alle $a \in R$. $\mathrm{K}(\mathrm{P})$ ist also ein (zweiseitiges) Ideal in P. Man kann $\mathrm{K}(\mathrm{P})$ kurz den *Ring der trivialen Doppelabbildungen* in P nennen.

Wir werden im folgenden nur diejenigen Elemente ϱ von P betrachten, für die

$${}^{\varrho}a = a^{\varrho} = a^{({\varrho}^{b})} = o \tag{8}$$

für alle $a, b \in R$ erfüllt ist. Wir bezeichnen die Menge dieser ϱ mit P_0. Es gilt offenbar $\mathrm{P}_0 \subseteq \mathrm{K}(\mathrm{P})$. Sind $\varrho, \sigma \in \mathrm{P}_0$ und $\alpha \in \mathrm{P}$, so folgen die Gleichungen

$${}^{\varrho-\sigma}a = a^{\varrho-\sigma} = a^{((\varrho-\sigma)^{a})} = o, \quad {}^{\alpha\varrho}a = a^{\alpha\varrho} = o$$

unmittelbar aus (1*) bzw. (2*). Ferner ergibt sich aus (4*), (1*) wegen der Annahme (8)

$$a^{((\alpha\varrho)^{b})} = a^{(\alpha(\varrho^{b}) + \alpha^{\varrho b})} = (a^{\alpha})^{(\varrho^{b})} + a^{(\alpha^{\varrho b})} = o.$$

Ganz ähnlich sieht man ein, daß $a^{((\varrho\alpha)^{b})} = o$. Somit haben wir bewiesen, daß P_0 ein Ideal in P ist.

Zulässig nennen wir einen Unterring T von P, wenn ${}^{a}\tau, \tau^{a} \in \mathrm{T}$ für alle $\tau \in \mathrm{T}$, $a \in R$ erfüllt ist.

4.

Nach dieser Vorbereitung beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Wenn die Funktionen* (C) *mit den Bedingungen* (D), (1*)—(6*) *für die Ringe* R, P *definiert sind, dann sind* R_0, P_0 *zulässige Ideale von* R

bzw. P, *ferner sind* R *und* P *je ein Bereich*[6]) *befreundeter Doppelhomothetismen für* P_0 *bzw.* R_0.[7])

Beweis. Wir betrachten den Unterring P_0, der nach dem obigen ein Ideal von P ist. Es ist zu beweisen, daß ${}^a\varrho, \varrho^a \in \mathsf{P}_0$ für alle $a \in R$, $\varrho \in \mathsf{P}_0$ gilt. Wegen (8) folgt aus (4*) und (5*)

$$({}^a\varrho)_b = b^{({}^a\varrho)} = (\varrho^a)_b = b^{(\varrho^a)} = o,$$

ferner ergibt sich wegen der Annahme aus der zu (6*) dualen Relation und aus (4*) bzw. aus der dualen Relation zu (2*)

$$b^{({}^a\varrho)^c} = b^{a(\varrho^c)} = (ba)^{\varrho^c} - b(a^{(\varrho^c)}) = o, \quad b^{(\varrho^a)^c} = b^{(\varrho^{ac})} = o.$$

Damit haben wir bewiesen, daß P_0 ein zulässiges Ideal von P ist. Endlich verschwindet wegen (8) jeder zweite Summand auf der rechten Seite der dualen Gleichungen von (4*) und (5*); deshalb bildet die Menge der Doppelabbildungen $\varrho \to {}^a\varrho$, $\varrho \to \varrho^a$ von P_0 in sich für alle $a \in R$ einen Ring von befreundeten Doppelhomothetismen von P_0. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Bemerkung. Der nur durch ${}^\varrho a = a^\varrho = o$ (für alle $a \in R$) definierte Unterring von P, d. h. $K(\mathsf{P})$ ist im allgemeinen nicht zulässig, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei $\mathfrak{R}$ der volle Matrixring vom Rang 2^2 über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen; R bzw. P bezeichnen den Unterring der Elemente von der Form $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\alpha = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & z \end{pmatrix}$. Es ist klar, daß $\mathfrak{R}$ eine Szépsche Erweiterung von R und P ist. Die Funktionen werden auf folgende Weise definiert:

$${}^\alpha a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ wz & 0 \end{pmatrix}, \quad a^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ wu & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^a\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & wv \end{pmatrix}, \quad \alpha^a = \begin{pmatrix} vw & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\varrho = \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $K(\mathsf{P})$ enthalten, doch liegen die Elemente ${}^a\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & wv \end{pmatrix}$, $\varrho^a = \begin{pmatrix} vw & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht in $K(\mathsf{P})$.

Für R_0 und P_0 gilt der folgende

Satz 2. *In einer Erweiterung* $\mathfrak{R}$ *von* R *und* P *ist* $(R_0, 0)$ *bzw.* (o, P_0) *je das größte in* $(R, 0)$ *bzw.* (o, P) *enthaltene Ideal. Ferner ist* (R_0, P_0) *ein Ideal*

[6]) D. h. die durch die Elemente von R induzierten Doppelabbildungen $\varrho_0 \to {}^a\varrho_0$, $\varrho_0 \to \varrho_0^a$ $(a \in R, \varrho_0 \in \mathsf{P}_0)$ von P_0 in sich einen Ring von befreundeten Doppelhomothetismen von P_0 bilden.

[7]) Den analogen Satz für Gruppen siehe z. B. in [2] (Satz 7).

in $\mathfrak{R}$, *und es gilt*[8])[9])

$$(R_0, \mathrm{P}_0) = (R_0, 0) \oplus (o, \mathrm{P}).$$

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß (o, P_0) ein Ideal von $\mathfrak{R}$ ist. Nehmen wir nun umgekehrt an, daß (o, T) ein Ideal von $\mathfrak{R}$ ist. Da die Produkte $(a, 0)(o, \tau) = (a^\tau, {}^a\tau)$ und $(o, \tau)(a, 0) = ({}^\tau a, \tau^a)$ für alle $a \in R$ und $\tau \in \mathrm{T}$ in (o, T) enthalten sind, folgt ${}^\tau a = a^\tau = o$. Aus $(a, 0)((o, \tau)(b, 0)) = (a^{(\tau^b)}, {}^a(\tau^b)) \in (o, \mathrm{T})$ ergibt sich ferner $a^{(\tau^b)} = o$ für $a, b \in R$ und $\tau \in \mathrm{T}$, d. h. $\mathrm{T} \subseteqq \mathrm{P}_0$. Daher ist (o, P_0) das größte in (o, P) enthaltene Ideal von $\mathfrak{R}$. $(\mathfrak{R}_0, \mathrm{P}_0)$ ist offenbar ein Ideal in $\mathfrak{R}$. Da das Nullelement $(o, 0)$ das einzige gemeinsame Element von $(R_0, 0)$ und (o, P_0) ist, folgt daraus die Richtigkeit der Behauptung in Satz 2.

Falls die Erweiterung $\mathfrak{R}$ einfach ist, leistet der folgende Satz gute Dienste:

Satz 3. *Ist die Erweiterung* $\mathfrak{R}$ *von* R *und* P *einfach, so kann keiner der Ringe* R, P *ein Bereich befreundeter Doppelhomothetismen für den anderen sein.*[10])

Beweis. Um den Satz zu beweisen, nehmen wir an, daß P ein Bereich befreundeter Doppelhomothetismen für R ist. Dies bedeutet, daß

$$^{({}^b\alpha)}a = a^{({}^b\alpha)} = {}^{(\alpha^b)}a = a^{(\alpha^b)} = o$$

für alle $a, b \in R$, $\alpha \in \mathrm{P}$ gilt. Daraus folgt aber $a^{({}^b\alpha)^c} = o, a^{(\alpha^b)^c} = o$, d. h. ${}^b\alpha = \alpha^b \in \mathrm{P}_0$ für alle $b \in R, \alpha \in \mathrm{P}$. Nach Satz 2 muß $\mathrm{P}_0 = o$ sein, folglich gilt

$$^b\alpha = \alpha^b = \alpha^{(b^\beta)} = 0$$

für jedes $b \in R$, $\alpha, \beta \in \mathrm{P}$. Dies besagt wegen (8), daß $R = R_0$. Nach Satz 2 ergibt sich, daß (R, o) ein Ideal von $\mathfrak{R}$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und hiermit ist Satz 3 bewiesen.

Wir beweisen nun den folgenden

Satz 4. *Wenn jeder der Ringe* R, P *in* $\mathfrak{R}$ *ein Bereich befreundeter Doppelhomothetismen für den anderen ist, dann gilt*[11])

$$\mathfrak{R}/(R_0, \mathrm{P}_0) \approx R/R_0 \oplus \mathrm{P}/\mathrm{P}_0.$$

Beweis. Die Annahme bedeutet genau, daß z. B. ${}^a\alpha, \alpha^a \in \mathrm{P}_0$ für alle $a \in R$, $\alpha \in \mathrm{P}$ gilt, wie wir das oben schon gesehen haben. Daraus folgt, daß (R_0, P) und (R, P_0) Ideale in $\mathfrak{R}$ sind, die nach Satz 2 den Unterring (R_0, P_0) als Ideal enthalten. Deshalb sind die Faktorringe $(R_0, \mathrm{P})/(R_0, \mathrm{P}_0)$ und $(R, \mathrm{P}_0)/(R_0, \mathrm{P}_0)$

---

[8]) Mit $\oplus$ bezeichnen wir die direkte Summe von Ringen im ringtheoretischen Sinne.

[9]) Den entsprechenden Satz im Fall der Gruppen siehe z. B. in [2] (Satz 8).

[10]) Den entsprechenden gruppentheoretischen Satz siehe z. B. in [2] (Satz 10).

[11]) Den analogen Satz für Gruppen siehe z. B. in [2] (Satz 11).

Ideale von $\mathfrak{R}/(R_0, \mathrm{P}_0)$. Ferner ist klar, daß diese Faktorringe (Ideale) kein Element außer (R_0, P_0) gemeinsam haben und jedes Element von $\mathfrak{R}/(R_0, \mathrm{P}_0)$ als Summe von Elementen aus $(R, \mathrm{P}_0)/(R_0, \mathrm{P}_0)$ und $(R_0, \mathrm{P})/(R_0, \mathrm{P}_0)$ darstellbar ist. Dies bedeutet eben, daß

$$\mathfrak{R}/(R_0, \mathrm{P}_0) = (R, \mathrm{P}_0)/(R_0, \mathrm{P}_0) \oplus (R_0, \mathrm{P})/(R_0, \mathrm{P}_0).$$

Hieraus ergibt sich wegen

$$(R, \mathrm{P}_0)/(R_0, \mathrm{P}_0) \approx R/R_0, \quad (R_0, \mathrm{P})/(R_0, \mathrm{P}_0) \approx \mathrm{P}/\mathrm{P}_0$$

die Richtigkeit der Behauptung. Somit ist Satz 4 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] G. Hochschild, On the cohomology theory for associative algebras, *Annals of Math.*, **47** (1946), 568—579.

[2] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **188** (1950), 201—227.

[3] L. Rédei, Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 169—195.

[4] L. Rédei, *Algebra* I (Leipzig, 1959).

[5] J. Szendrei, Über eine allgemeine Ringkonstruktion durch schiefes Produkt, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 63—76.

[6] J. Szép, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1949), 31—33.

[7] J. Szép, On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *Acta Sci. Math.*, **12 A** (1950), 57—61.

[8] J. Szép, Über eine neue Erweiterung von Ringen. I, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 51—62.

(Eingegangen am 24. Dezember 1959)